

1. מצא את השאריות של הפונקציות הבאות בכל נקודות סינגולאריות:

$$f(z) = z^n \sin \frac{1}{z} \quad \text{ג'.} \quad f(z) = \cos \frac{1}{z-2} \quad \text{ב'.} \quad f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)} \quad \text{א'}$$

פתרון:

א'. נקודות הסינגולאריות של הפונקציה הנתונה הינן $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$.

1. הנקודה $z_1 = 0$ הינה קוטב מסדר 2 של הפונקציה. לכן:

$$(1.1) \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2} = 0$$

2. הנקודה $z_2 = 1$ הינה קוטב מסדר 1, ולכן:

$$(1.2) \quad \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + z - 1}{z^2} = 1$$

3. כיוון שמתקיים:

$$(1.3) \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{\infty} f(z) = 0$$

$$\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = -1 \quad \text{מקבלים כי}$$

ב'. כיוון שהפיתוח של הפונקציה הנתונה לטור Laurent הינו:

$$(1.4) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{z-2} \right)^{2n} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-2} \right)^2 + \dots$$

המקדם של $(z-2)^{-1}$ שווה ל-0, ולכן $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = 0$.

ג'. לכיוון שהפיתוח של הפונקציה לטור Laurent בסביבת $z = 0$ הינו:

$$(1.5) \quad f(z) = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k-n+1}}$$

השוויון $2k - n + 1 = 1$ בלתי אפשרי אם $n < 0$ או אם $n \in \mathbb{Z}$ ואי זוגי. לכן, במקרים האלה

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname{Res}_{\infty} f(z) = 0$$

אם $n = 2m$ כאשר $m \geq 0$, אזי החלק העקרי של טור Laurent של הפונקציה יכול להיות האבר:

$$(1.6) \quad \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-1} = \frac{(-1)^{m/2}}{(n+1)!} z^{-1}$$

לכן, עבור כל ה- $n \in \mathbf{Z}^+$ הזוגיים נקבל: $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!} = -\operatorname{Res}_{\infty} f(z)$.

2. חשב את האינטגרלים:

$$\Gamma_R = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| = R, n < R^2 < n+1, n \in \mathbf{N} \right\} \quad \text{כאשר} \quad \int_{\Gamma_R} \frac{z \, dz}{e^{2\pi i z^2} - 1}.$$

פתרון:

בתוך המעגל הנתון נמצאים $4n+1$ קוטבים של הפונקציה: $z = 0$ והנקודות $z_m = \sqrt{k} e^{\frac{i\pi m}{2}}$ כאשר $m = 0, 1, 2, 3$. לכן:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{z \, dz}{e^{2\pi i z^2} - 1} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^3 \operatorname{Res}_{z=z_m} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} \right) = \\ (1.7) \quad &= 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^3 \frac{1}{4\pi i e^{(-1)^m 2\pi i k}} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} + \frac{n}{\pi i} \right) = 2n + 1 \end{aligned}$$

(ג') $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ — סדר ∞ —
הסימנים ∞ ו- ∞ הם סימנים:

157

(בד"ס מיינעלעך: ס' היסטאריען היילן אמונה האט
 גע' רב'ס ר' ב"ן היסטאריע, פא. ע.ק.
 יק' ה' ש"ס ר' שמואל. קבא:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = 0, n \neq -1 \quad \text{---} \quad \text{iii)}$$

1200

$$\int_{\Gamma} \sqrt{\frac{z}{z+1}} dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{\infty} \sqrt{\frac{z}{z+2}} = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{\infty} \frac{1}{(1+\frac{z}{2})^{1/2}} =$$

$$= -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + o(1/z)\right) = -2\pi i.$$

.3
:(10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \cdot \sin^2 \frac{z}{2} &= \frac{1}{2z} \cdot \left(1 - \cos \frac{z}{2} \right) = \frac{1}{2z} \cdot \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{z}{2} \right)^4 - \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \right] \right) = \frac{1}{2z} \cdot \left(\frac{1}{2!} \frac{16}{z^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{256}{z^4} + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{4}{z^3} + \frac{256}{2 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{z^5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2 \cdot (2n-2)!} \cdot z^{2n-1} + \dots \right) \end{aligned}$$

:(12)

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-z}}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \right) = \frac{1}{z^3} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot z^n \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot z^{n-3} \end{aligned}$$

$|z-2| \neq 0$:

:(12)

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z-2} &= \frac{1}{z-2} \cdot \sin((z-2)+2) = \frac{1}{z-2} \cdot (\sin(z-2) \cos 2 + \cos(z-2) \sin 2) = \\ &= \frac{1}{z-2} \left(\cos 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{(z-2)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sin 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \cdot \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} \right) = \\ &= \cos 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot (z-2)^{2n-2} + \sin 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \cdot z^{2n-3} \end{aligned}$$

(4)

$$f(z) = \frac{84z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-5} =$$

$$= \frac{1}{z^3} + \dots \Rightarrow$$

הוק' ציהס זה ה' קטל

מ 30 ר (3) של ה פו/ 37 !

(5)

$$f(z) = \cos(e^{1/2}) = \cos\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}}_{\cos(z)}\right) = 1 - \frac{1}{2!} \cos^2(z) + \frac{1}{4!} \cos^4(z) - \dots$$

הרור כי הפ' תוג הא חיון לו כולל פסולת השי "הסל' .
 מה ה- z מה אנרסל א חוגר. לכן, הפיגחטל (z)
 כולל מילסל א חוגרם פכול' א גרנה והחזקה (בגרה)
על ה! < ס- z - נלי ס' אר' א עיקרם !!

$$\textcircled{5} \quad n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \frac{1}{\ln(n\pi)} \quad \text{וקר} \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

מכאן:

$$\cos(e^{1/z_n}) = \cos(e^{\ln(n\pi)}) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

לפיכך הסדרה $\cos(e^{1/z_n})$ אינה מתכנסת! $n \rightarrow \infty$

$\textcircled{6}$ נניח כי הפונקציה $f(z)$ גזירה ב-0 (בסדרה $z=0$):
~~הפונקציה $f(z)$ היא פולינום~~

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$$

כיוון שהפונקציה $f(z)$ היא גזירה ב-0, רציוס ההסדרה z_n שואף ל- ∞ .

אם z_n הוא רציוס, אז $f(z_n) = (-1)^n$ (לפי $\textcircled{5}$).
 ב-0 הפונקציה קוטפת את $f(1/2)$, מכאן:

$$f(1/2) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \dots$$

אכן, ישנן כמה סופים של מקדמים שיתארו $z=0$ (לפי $\textcircled{5}$ - היותו פולינום).

7) ρ פונקציה ממשית

$$|z^n - (z^n - f(z))| = |f(z)| < 1$$

לפי משפט רימן-שטראוס, z^n ו- $(z^n - f(z))$ אינן שוות, ולכן $f(z)$ אינו פולינום.
 מכאן נובע ש- $f(z)$ אינו פולינום, ולכן $f(z)$ אינו פולינום.
לפי משפט רימן-שטראוס

8) ρ פונקציה ממשית

$$I = \int_C \tan z \, dz = 2\pi i \sum_{|z_n| < 6} \operatorname{Res} \tan z.$$

הפונקציה $f(z) = \tan z$ היא פונקציה ממשית, ולכן $f(z)$ היא פונקציה ממשית.
 הפונקציה $f(z) = \tan z$ היא פונקציה ממשית, ולכן $f(z)$ היא פונקציה ממשית.

$$z \text{ צמוד } 0 \Rightarrow z_n = +\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_{-2} = -\frac{3\pi}{2}, \\ z_{-1} = -\frac{\pi}{2}, \\ z_0 = \frac{\pi}{2}, \\ z_1 = \frac{3\pi}{2}. \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{7/46}$$

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \Rightarrow \varphi(z) = \sin z \Rightarrow$$

$$\psi(z) = \cos z \Rightarrow \varphi'(z_i) \neq 0, i' = -2, 1$$

$$\varphi'(z_i) \neq 0, i' = -2, 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res} \tan z = -\frac{\sin z_i}{\cos z_i} = -1 \Rightarrow I = 2\pi i \cdot (-4) = -8\pi i.$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{3^{n+1}}}_{\substack{m=-n \\ n=-m \\ m \rightarrow n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n+1}} \cdot \frac{1}{z^n} + \sum_1$$

(9)

$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}}_{\sum_2}$$

(a). \sum_2 : $\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R_2 = 3$

(b). \sum_1 : $\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{-n+1}}} = 1 \Rightarrow R_1 = 1$

12/2/23 : סוג 0/מח 1/6, 1/2